حسابان

سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۶

۱- آیا توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}.\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ با هم مساویند؟ چرا؟

۲- توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ مفروضند:

الف) دامنه gof را تعیین کنید. ب) در صورت وجود ضابطه‌ی تابع gof را بنویسید.

۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2-4x+1=0$ باشند، بدون حل معادله، مقدار عددی عبارت $\alpha^2+\frac{1}{\alpha}+\beta^2+\frac{1}{\beta}$ را تعیین کنید.

۴- f تابعی یک‌به‌یک است و f^{-1} معکوس تابع است. معکوس تابع $g(x)=1-2f(3-4x)$ را بنویسید.

۵- تابع f با ضابطه‌ی $f=\{(x,y)|x^2-4x-y=0\}$ مفروض است. مقدار می‌نیمم تابع f را تعیین کنید.

۶- اگر $2x^3-3x^2+ax-b$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، نشان دهید: $2a+4=b$

۷- آیا $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x^2-x}$ وجود دارد؟ چرا؟

۸- حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید. ([ ] نماد جزءصحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x^3-3x+2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{1-[x]}$ ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{Sin}\,x}{1-\mathrm{Cos}\,2x}$ د) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$

۹- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}a[4x]-b & x<1\\ 1 & x=1\\ a\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}x+b & x>1\end{cases}$ مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که f در $x_0=1$ پیوسته باشد. ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱۰- مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) ۱) $y=\frac{(2x-x^3)^5}{\sqrt{x}-1}$ ۲) $y=\mathrm{Sin}^3x-4\mathrm{Arc}\tan x$ ۳) $x^3+2xy+y^2-5=0$

ب) اگر $f(x)=g(3x^2-2x)$ و $g'(1)=1$ باشد، مقدار عددی $f'(1)$ را حساب کنید.

۱۱- تابع $y=\frac{ax+b}{x+c}$ مفروض است. ضرایب a و b و c را چنان بیابید که خطوط $x=-2$ و $y=-1$ مجانب‌های تابع بوده و منحنی نمایش تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند.

۱۲- از نقطه‌ی $O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ دو مماس بر منحنی $y=x^2+1$ رسم شده است. معادلات خطوط مماس را بنویسید.

۱۳- با رسم نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=||x|-1|$، تعیین کنید f در چه نقاطی مشتق‌پذیر نیست.

۱۴- تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است. ضرایب a، b، c و d را چنان بیابید که نقطه‌ی $(1,-2)$ نقطه‌ی عطف منحنی تابع بوده و تابع به‌ازای $x=2$ دارای اکسترممی مساوی ۴- باشد.

۱۵- مقدار عددی عبارت A را تعیین کنید. $A=\tan\left(\mathrm{Arc}\tan(-1)+\mathrm{Arc}\mathrm{Sin}\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Arc}\mathrm{Cos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

۱۶- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\frac{\tan x}{1-\tan x}$ را در بازه‌ی $[0,\pi]$ رسم کنید.

۱۷- با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x<0\\ \frac{x+1}{2} & x\geq 0\end{cases}$ مقدار عددی $\int_{-2}^{3}f(x)dx$ را تعیین کنید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۶

۱- بله

اولاً:

$$D_f : \begin{cases} x \geq ۰ \\ ۱ - x \geq ۰ \to x \leq ۱ \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [۰\,,\,۱]$$

$$D_g : x - x^۲ \geq ۰ \to x(۱-x) \geq ۰$$

$$x = ۰ \text{ یا } ۱ - x = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

x	۰		۱
	۰	+	۰

$$D_f = [۰\,,\,۱] \quad \Rightarrow D_f = D_g$$

ثانیاً: برای هر $x \in D_f = D_g$ مقدار هر دو تابع مساوی هستند.

۲- الف:

$$D_f = IR$$

$$D_g : -x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \Rightarrow D_g = (-\infty, ۰]$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\} = \{x \in IR \,|\, x^۲ + ۱ \in (-\infty, ۰)\} = \phi$$

ب: چون دامنه ϕ شد، پس gof ضابطه ندارد.

۳-

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-۴}{۱} = ۴ \qquad \alpha^۲ + \frac{۱}{\alpha} + \beta^۲ + \frac{۱}{\beta} \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ + \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱$$

$$(\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = (۴)^۲ - ۲(۱) + \frac{۴}{۱} = ۱۸$$

۴-

$$g(x) = ۱ - ۲f(۳ - ۴x)$$

$$y = g(x) \Rightarrow g^{-۱}(y) = x \qquad (۱)$$

$$y = ۱ - ۲f(۳ - ۴x) \Rightarrow ۲f(۳ - ۴x) = ۱ - y \quad f(۳ - ۴x) = \frac{۱ - y}{۲} \Rightarrow \begin{cases} f^{-۱}of(۳ - ۴x) = ۳ - ۴x \\ ۴x = ۳ - f^{-۱}(f(۳ - ۴x)) \\ x = \dfrac{۲ - f^{-۱}\left(\dfrac{۱-y}{۲}\right)}{۴} \qquad (۲) \end{cases}$$

$$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow g^{-۱}(y) = \frac{۳ - f^{-۱}\left(\dfrac{۱-y}{۲}\right)}{۴} = g^{-۱}(x) = \frac{۳ - f^{-۱}\left(\dfrac{۱-x}{۲}\right)}{۴}$$

۵-

روش اول: مربع کامل می‌کنیم:

$$y = x^۲ - ۴x = (x - ۲)^۲ - ۴ \Rightarrow Min(y) = -۴$$

روش دوم: مشتق می‌گیریم:

$$y = x^۲ - ۴x \Rightarrow y' = ۲x - ۴ \xrightarrow{y'=۰} x = ۲ \Rightarrow y(۲) = -۴$$

$$f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ + ax - b$$

اگر $f(x)$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر باشد خواهیم داشت $\Rightarrow f(x) = (x-۲)Q(x) \Rightarrow f(۲) = ۰$

۶-

$$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow ۲x^۳ - ۳x^۲ + ax - b = ۰ \to ۲(۲)^۳ - ۳(۲)^۲ + a(۲) - b = ۰$$

$$۱۶ - ۱۲ + ۲a - b = ۰ \Rightarrow ۲a + ۴ - b = ۰ \Rightarrow ۲a + ۴ = b$$

۷- خیر

$$x^۲ - x \geq ۰ \to D = (-\infty\,,\,۰] \cup [۱\,,\,+\infty)$$

$$x^۲ - x = ۰$$

$$x(x - ۱) = ۰$$

x		۰		۱	
	+	۰	-	۰	+

تابع برای x کمتر از ۱ تعریف نشده، پس حد وجود ندارد.

۸-

$$\text{الف: } \lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۳-۳x+۲}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۱)^۲(x+۲)}=\frac{(x-۳)}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty$$

$$x^۳-۳x+۲=(x-۱)(x^۲+x-۲)=(x-۱)(x-۱)(x+۲)=(x-۱)^۲(x+۲)$$

$$\text{ب: } \lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{۱-[x]}=\frac{\text{نسبی}\ \circ}{\text{مطلق}\ \circ}=\text{حد ندارد}$$

$$۱-[x]=۰\Rightarrow [x]=۱\Rightarrow ۱<x<۲$$

$$\text{ج: } \lim_{x\to ۰}\frac{x\operatorname{Sin}x}{۱-\operatorname{Cos}۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x\operatorname{Sin}x}{۲\operatorname{Sin}^۲x}=\frac{۱}{۲}\times\frac{x}{\operatorname{Sin}x}\times\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Sin}x}=\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۲}$$

$$\text{د: } \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^۲+۲x}+x\right)=\infty-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^۲+۲x}+x\right)\left(\sqrt{x^۲+۲x}-x\right)}{\sqrt{x^۲+۲x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲+۲x-x^۲}{\sqrt{x^۲+۲}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{\sqrt{x^۲\left(۱+\frac{۲}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{|x|\sqrt{۱+\frac{۲}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{-x\sqrt{۱+\frac{۲}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{-۲x}=-۱$$

۹-

$$\lim_{x\to ۱^-}a[۴x]-b=۳a-b \qquad \lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)=f(۱)$$

$$\lim_{x\to ۱^+}a\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۲}x+b=a+b \qquad ۳a-b=a+b=۱\Rightarrow\begin{cases}۳a-b=۱\\a+b=۱\end{cases}\Rightarrow ۴a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=\frac{۱}{۲}$$

$$f(۱)=۱$$

۱۰- الف:

$$۱)\ y'=\frac{۵\left(۲-۳x^۲\right)\left(۲x-x^۳\right)^۴\left(\sqrt{x}-۱\right)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\left(۲x-x^۳\right)^۵}{\left(\sqrt{x}-۱\right)^۲}$$

$$۲)\ y'=۳\operatorname{Sin}^۲x.\operatorname{Cos}x-۴\left(\frac{۱}{۱+x^۲}\right)$$

$$۳)\ ۳x^۲+۲y+۲xy'+۲yy'=۰\Rightarrow y'=\frac{-\left(۳x^۲+۲y\right)}{۲x+۲y}$$

ب:

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)\to f'(x)=(۶x-۲)g'\left(۳x^۲-۲x\right)\Rightarrow f'(۱)=۴\times۱=۴$$

۱۱-

$$x\to\pm\infty\Rightarrow y=\frac{a}{۱}\Rightarrow -۱=\frac{a}{۱}\Rightarrow a=-۱$$

$$y\to\pm\infty\Rightarrow x+c=۰\Rightarrow x=-c\Rightarrow -۲=-c\Rightarrow c=۲$$

$$A\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.\Rightarrow y=\frac{ax+b}{x+c}\Rightarrow ۱=\frac{۰\times a+b}{۰+c}\Rightarrow ۱=\frac{b}{c}\Rightarrow b=c\Rightarrow b=۲$$

۱۲-

$x=\alpha \Rightarrow y=x^{۲}+۱ \Rightarrow y=\alpha^{۲}+۱ \qquad B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha^{۲}+۱\end{matrix}\right.$

$y=x^{۲}+۱ \qquad y-y_{۱}=m(x-x_{۱})$

$y'=۲x \qquad y-(\alpha^{۲}+۱)=۲\alpha(x-\alpha)$

$m=y'=۲\alpha \qquad O\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right. \Rightarrow y-\alpha^{۲}-۱=۲\alpha(x-\alpha) \Rightarrow -\alpha^{۲}-۱=-۲\alpha^{۲} \Rightarrow -\alpha^{۲}+۲\alpha^{۲}=۱ \Rightarrow \alpha^{۲}=۱ \Rightarrow \alpha=\pm۱$

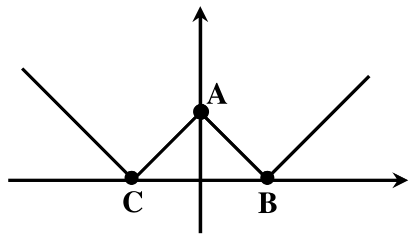
$\alpha=\pm۱ \Rightarrow m=۲\alpha \Rightarrow m=\pm۲ \quad , \quad O\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right. \Rightarrow y-y_{۰}=m(x-x_{۰}) \Rightarrow y-۰=\pm۲(x-۰) \Rightarrow y=۲x \quad , \quad y=-۲x$

۱۳-

$f(x)=\left||x|-۱\right|$

$x=۰ \Rightarrow y=۱ \qquad A\left|\begin{matrix}۰\\ ۱\end{matrix}\right.$

$y=۰ \Rightarrow |x|-۱=۰ \Rightarrow |x|=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \quad B\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right. \qquad C\left|\begin{matrix}-۱\\ ۰\end{matrix}\right.$



۱۴-

$y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$

$y'=۳ax^{۲}+۲bx+c$

$y'=۰ \Rightarrow ۳ax^{۲}+۲bx+c=۰$

$x=۲ \Rightarrow ۳ax^{۲}+۲bx+c=۰$

$۱۲a+۴b+c=۰$

$b=-۳a \Rightarrow ۱۲a+۴b+c=۰ \Rightarrow c=۰$

$y''=۶ax+۲b$

$y''=۰ \Rightarrow ۶ax+۲b=۰+$

$x=۱ \Rightarrow ۶ax+۲b=۰$

$۶a+۲b=۰ \Rightarrow ۳a+b=۰ \Rightarrow b=-۳a$

$(۱,-۲) \Rightarrow y=ax^{۳}+bx^{۲}+ax+d \Rightarrow -۲=a+b+c+d$

$(۲,-۴) \Rightarrow y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d \Rightarrow -۴=۸a+۴b+۲c+d$

$\begin{matrix}c=۰\\ b=-۳a\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}-۲=a+b+c+d \Rightarrow -۲=a-۳a+d \Rightarrow \left|-۲=-۲a+d\right.\\ -۴=۸a+۴b+۲c+d \Rightarrow -۴=۸a-۱۲a+d \Rightarrow \left|-۴=-۴a+d\right.\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}a=۱\\ d=۰\end{matrix}$

$a=۱ \Rightarrow b=-۳a \Rightarrow b=-۳$

۱۵-

$\mathrm{Arctan}(-۱)=-\frac{\pi}{۴} \qquad \mathrm{ArcCos}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$

$\mathrm{ArcSinn}\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۶} \qquad \mathrm{Arctan}\left(-\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}+\frac{۳\pi}{۴}\right)=\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$

۱۶-

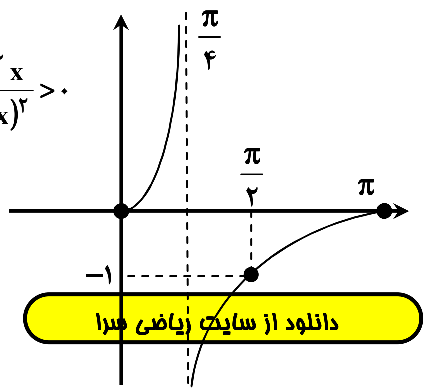
$y=\frac{\tan x}{۱-\tan x}$

$y'=\frac{(۱-\tan^{۲}x)(۱-\tan x)+(۱+\tan^{۲}x)\tan x}{(۱-\tan x)^{۲}}=\frac{(۱+\tan^{۲}x)(۱-\tan x+\tan x)}{(۱-\tan x)^{۲}}=\frac{۱+\tan^{۲}x}{(۱-\tan x)^{۲}}>۰$

$x=۰ \Rightarrow y=۰$

$y=۰ \Rightarrow \tan x=۰$

$x=k\pi$

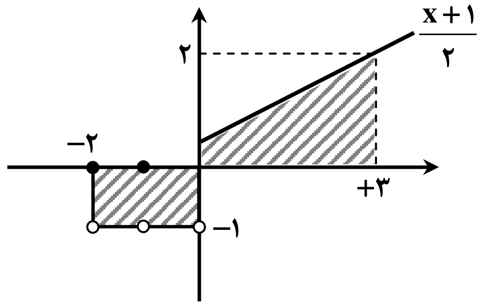


$x=۰ , x=\pi$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=$ تعریف نشده

مجانب قائم $y\to\pm\infty$

$۱-\tan x=۰\Rightarrow \tan x=۱ \quad x=k\pi+\alpha \qquad x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}$

-۱۷



$$\int_{-۲}^{۳}f(x)dx=-۱\times۲+\frac{\left(\frac{۱}{۲}+۲\right)\times۳}{۲}=-۲+\frac{۱۵}{۴}=\frac{۷}{۴}$$