

۱- توابع  $f$  و  $g$  با ضابطه های  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = \frac{1}{x}$  مفروضند؟

(الف) بدون تشکیل ضابطه، دامنه ی تابع  $f \circ g$  را تعیین کنید. (ب) در صورت وجود ضابطه ی تابع  $f \circ g$  را بنویسید.

۲- اگر باقیمانده ی تقسیم چند جمله ای  $p(x)$  بر  $x-1$  و  $x+2$  به ترتیب برابر ۱ و ۴ باشد باقیمانده ی تقسیم  $p(x)$  بر  $x^2+x-2$  را حساب کنید؟

۳- تابع  $f: R \rightarrow R$  زوج و تابع  $g: R \rightarrow R$  فرد می باشند، بررسی کنید آیا توابع  $f+g$  و  $f \cdot g$  می توانند زوج یا فرد باشند؟ چرا؟

۴- ثابت کنید  $f(x) = x^2 + 1$  در بازه  $[-\infty, \infty]$  یک به یک است؟ سپس ضابطه ی تابع معکوس تابع  $f$  را تعیین کنید؟

۵- درستی رابطه ی روبه رو را ثابت کنید؟  
 $\sin 25^\circ \cos 65^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 50^\circ$

۶- حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید ( $[]$  نماد جزء صحیح است).

(الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x+1}}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 4x + 3}{(x-1)^2}$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \sin^3 x}{4x^3}$

(د)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{[x] - 2}$

۷- معادلات خطوط مجانب قائم و افقی تابع  $f$  با ضابطه ی  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 - 1}$  را در صورت وجود به دست آورید؟

۸- مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع  $f$  با ضابطه ی  $f(x) = \begin{cases} x-1+a & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{x}{\tan x} & x > 0 \end{cases}$  در نقطه ی  $x_0 = 0$  پیوسته باشد؟

۹- (الف) مشتق توابع زیر را حساب کنید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x} \cdot \sin(\arcsin f(x))$  و  $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$

(ب) اگر  $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  باشد، مشتق تابع  $y = f(\Delta x^2 - x)$  را نسبت به  $x$  تعیین کنید؟

۱۰- نقاطی از منحنی تابع  $y = x^3 - 3x^2$  را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط موازی محور  $x$  ها باشد؟

۱۱- جدول تغییرات و نمودار تابع  $y = \frac{x+1}{x}$  را رسم کنید؟

۱۲- آهنگ تغییر مساحت دایره ای به شعاع  $R$  را نسبت به  $R$  در  $R_0 = 2$  حساب کنید؟

۱۳- مشتق پذیری تابع  $f$  با ضابطه ی  $f(x) = \sqrt{(x+2)\sin^2 x}$  را در نقطه ی  $x_0 = 0$  بررسی کنید؟

۱۴- معادله ی مثلثاتی  $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$  را حل کرده و جواب های بین  $0$  و  $2\pi$  را تعیین کنید؟

۱۵- جدول تغییرات و نمودار تابع  $\cos(\arcsin f(x))$  را رسم کنید. سپس نقاط بحرانی تابع را تعیین کنید؟

۱۶- معادله ی خط مماس بر منحنی  $x^2 y^2 = 25$  را در نقطه ی  $A(1, 5)$  بنویسید؟

۱۷- اولاً: نمودار تابع  $f(x) = 2 - |x-1|$  را رسم کنید. ثانیاً: مقدار  $\int_{-3}^2 f(x) dx$  را محاسبه کنید؟

**پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری - فرادماه ۱۳۸۵**

-۱

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} \geq 1\right\} = (0, 1]$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \quad R_g \cap D_f \neq \emptyset$$

-۲

$$P(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax + b \quad x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$\begin{cases} p(1)=1 \\ p(-2)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(x)=ax+b \\ R(x)=-x+2 \end{cases}$$

-۳

$$D_{f \cdot g} = D_{f+g} = D_f \cap D_g \quad x \in D_f \cap D_g \rightarrow -x \in D_f \cap D_g$$

چون  $f$  زوج،  $g$  فرد است بنابراین  $g(-x) = -g(x), f(-x) = f(x)$  اکنون داریم:

$$(f \cdot g)(-x) = -f(x) \cdot g(x) \rightarrow f \cdot g \text{ فرد}$$

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) \rightarrow f+g \text{ نه زوج و نه فرد}$$

-۴

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \rightarrow |x_1| = |x_2| \xrightarrow[\text{اعداد منفی هستند}]{\text{چون } x_2, x_1} -x_1 = -x_2 \rightarrow x_1 = x_2 \text{ یک به یک است.}$$

$$y = x^2 + 1 \rightarrow |x| = \sqrt{y-1} \rightarrow -x = \sqrt{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} \quad x \geq 1$$

-۵

$$\sin 25^\circ \cos 65^\circ = \frac{1}{2} \left( \sin(25^\circ + 65^\circ) + \sin(25^\circ - 65^\circ) \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 90^\circ - \sin 40^\circ) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 40^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 50^\circ$$

توجه داشته باشید که  $\sin 40^\circ = \sin(90^\circ - 50^\circ) = \cos 50^\circ$

(۶- الف)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x+1}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{(x + \sqrt{x+1})(x + |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x(2x)} = 0$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin x \cdot \sin 2x}{4x \cdot x \cdot 2x} = \frac{2}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{4}$$

(د) حد ندارد. زیرا برای  $x$  بیشتر از ۲ و نزدیک به ۲ تعریف نشده یا به عبارتی  $\frac{\text{حدی}}{\text{مطلق}}$  ایجاد شده و لذا حد وجود ندارد.

-۷

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  : مجانب افقی  $y = \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$  : مجانب قائم  $x = 1$  ,  $x = -1$  ,  $\lim_{x \rightarrow (-1)^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

-۸

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  : شرط پیوستگی در  $x_0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a$  ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b$  ,  $f(0) = b$

$a = b \Rightarrow b = a$  ,  $a = b$

۹- الف)

$$f'(x) = \frac{2x - \Delta}{\sqrt{(x^2 - \Delta x)^2}} \cdot \sin 2x + 2 \cos 2x \cdot \sqrt{x^2 - \Delta x}$$

$$g'(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{1 - (\Delta x)^2}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

ب)

$$y' = (1 \cdot x - 1)f'(\Delta x^2 - x) = (1 \cdot x - 1)\sqrt{(\Delta x^2 - x)^2} + 1$$

-۱۰

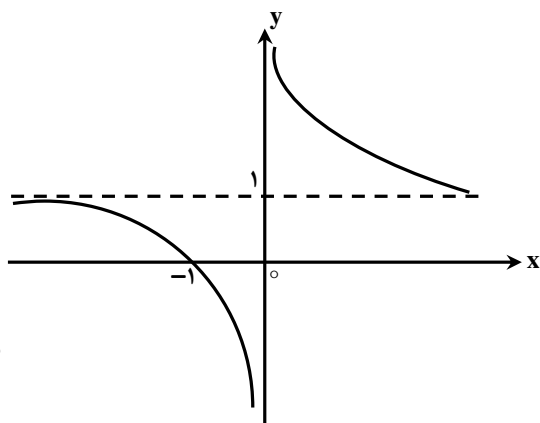
$$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 & x = 0 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 0 \\ 3x(x - 2) = 0 & x = 2 \xrightarrow{\text{تابع}} y = -6 \end{cases}$$

$A(0, 0)$  ,  $B(2, -6)$

-۱۱

$$y' = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad x = -1 \rightarrow y = 0$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		-		-
y	1	↘	↘	1



$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} y = \pm\infty$  : مجانب ها  $x = 0$  ,  $y = 0$

$$S = \pi R^2 \rightarrow S' = 2\pi R \rightarrow S'(r) = 2\pi r$$

-۱۲

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+2)\sin^2 x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x| \sqrt{x+2}}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} \cdot \sqrt{x+2} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$f$  در  $x_0 = 0$  مشتق پذیر نیست.

۱۴- با تغییر متغیر  $\sin x = t$  معادله داده شده چنین است:  $2t^2 + t - 3 = 0$   
با حل این معادله درجه دوم داریم:

$$2t^2 + t - 3 = 0 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-3)}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

اکنون مقادیر  $x$  را می یابیم:

$$t = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{2}$$

$$t = -\frac{3}{2} \rightarrow \sin x = -\frac{3}{2} \rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \rightarrow \frac{1}{|x|} \leq 1 \rightarrow |x| \geq 1 \rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

$$y' = \frac{-(-\frac{1}{x^2})}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow y' \text{ همواره مثبت است.}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$y'$		+		+
$y$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\pi$	$\nearrow$
			$\circ$	$\frac{\pi}{2}$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{بنابراین } y = \frac{\pi}{2} \text{ مجانب افقی تابع است.} \quad f(-1) = \pi, \quad f(1) = 0$$

نقاط بحرانی  $(1, 0)$ ,  $(-1, \pi)$

۱۶-

$$y' = -\frac{y}{x} \quad y' = m = -\frac{\Delta}{1} \Rightarrow m = -\Delta$$

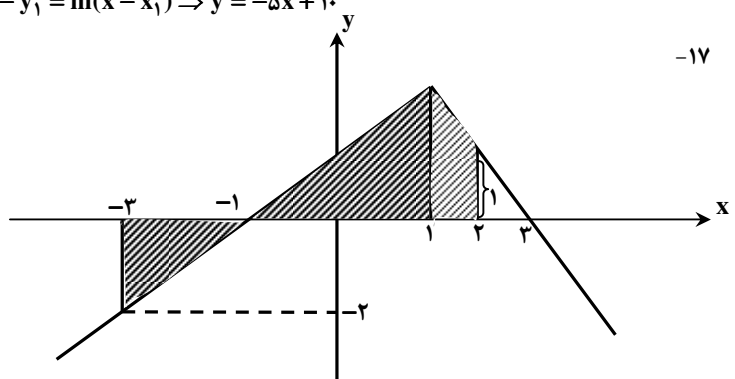
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y = -\Delta x + 10$$

۱۷-

$$x = 1 \rightarrow y = 2 \quad x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$y = 0 \rightarrow |x - 1| = 2 \quad x = 3, x = -1$$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = -\frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} + \frac{(1+2) \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$



دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا

WWW.RIAZISARA.IR